Méthodes de géométrie analytique et différentielle

PC*

17 décembre 2008

Table des matières

17 décembre 2008

Première partie
Sur l'utilisation de Maple

[1]

1 Conseils méthodologiques

Les calculs : Donner un nom a tout résultat d'un calcul pour qu'il soit réutilisable. Comme pour les calculs à la main il est souvent préférable d'utiliser des expressions intermédiaires qui accroissent la lisibilité et limitent la propagation des erreurs. Enfin Maple sait très bien calculer avec des polynômes à plusieurs variables auxquels il est préférable de se ramener chaque fois que c'est possible par exemple en utilisant des paramétrages par des fractions rationnelles. Éviter d'introduire une

[1]Des nouvelles technologies du XXI éme siècle à moins que ce ne soit du troisième millénaire (à l'aube duquel il est d'ailleurs inconcevable que .. bla bla bla.. la suite tous les jours du XXI eme siècle dans votre journal ou sur votre chaîne de radio ou de télé favorite)

équation du type $expr = a$ qui ne sera pas algébriquement manipulable par Maple alors qu'on peut travailler directement avec *expr* qui l'est.

Les jockers : Éviter l'utilisation des "jokers" : (% pour les versions ultérieures à 5.0). Ces caractères désignent toujours le dernier résultat calculé ce qui rend le retour en arrière difficile.

Les commandes : Maple est un langage **fonctionnel**. Il est souvent préférable de programmer en composant les différentes fonctions de bibliothèque.

Exemple 1 (Un exemple de développement trigonométrique). -

```
>factor(expand(cos(5*theta)));
```

$$\cos(\theta)\,(16\cos(\theta)^4 - 20\cos(\theta)^2 + 5)$$

On voit que le polynôme $16\,X^4 - 20\,X^2 + 5$ est bicarré, probablement irréductible sur $\mathbf{Q}$. On va désigner par α une de ses racines :

```
>alias(alpha=RootOf(16*z^4-20*z^2+5,z));
```

La commande *alias* sert, comme son nom l'indique, à remplacer l'écriture indigeste $RootOf(16*_Z^4-20*_Z^2+5,_Z)$ par la lettre α chaque fois qu'elle se présentera. Maple liste alors les alias existants, à savoir I et α. Si le polynôme est réductible sur $\mathbf{Q}$, Maple le signale et refuse l'alias. On peut supprimer l'alias *via* la commande *unalias*.
Voila un exemple de programmation par compositions des commandes Le résultat est la factorisation de l'expression algébrique donnant $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ dans l'extension $\mathbf{Q}[\alpha]$.

```
>expr:=subs(x=cos(theta),factor(subs(cos(theta)=x,
expand(cos(5*theta))),alpha));
```

$$expr := 16\,(\cos(\theta) + \alpha)\,(\cos(\theta) - \alpha)$$
$$(\cos(\theta) + 3\,\alpha - 4\,\alpha^3)\,(\cos(\theta) - 3\,\alpha + 4\,\alpha^3)\,\cos(\theta)$$

Les expressions et les fonctions : Une expression peut être considérée comme un arbre (au sens informatique du terme). Une fonction prend un argument en paramètre et retourne une expression. Lorsqu'on utilise

les fonctions il y à lieu d'être attentif à la portée locale des identificateurs. Voici un exemple de fonction censée prendre en argument un réel θ et retourner le vecteur $[\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)]$ avec $\rho = \cos(\theta)$:

```
>with(linalg):
>rho:=cos(theta);
>f:=proc(theta)
evalm(vector([rho*cos(theta),rho*sin(theta)])) end;
```

L'appel de $f(\theta)$ retourne :

$$[\cos(\theta)^2, \cos(\theta)\ \sin(\theta)]$$

Ca semble bon à première vue mais si on appelle $f(\theta+\pi/2)$ on obtient :

$$[-\cos(\theta)\ \sin(\theta), \cos(\theta)^2]$$

Si l'on veut le bon résultat il faut procéder autrement :

```
>g:=proc(theta) local rho;
rho:=cos(theta);
evalm(vector([rho*cos(theta),rho*sin(theta)])) end;
>g(theta+Pi/2);
```

$$[\sin(\theta)^2, -\cos(\theta)\ \sin(\theta)]$$

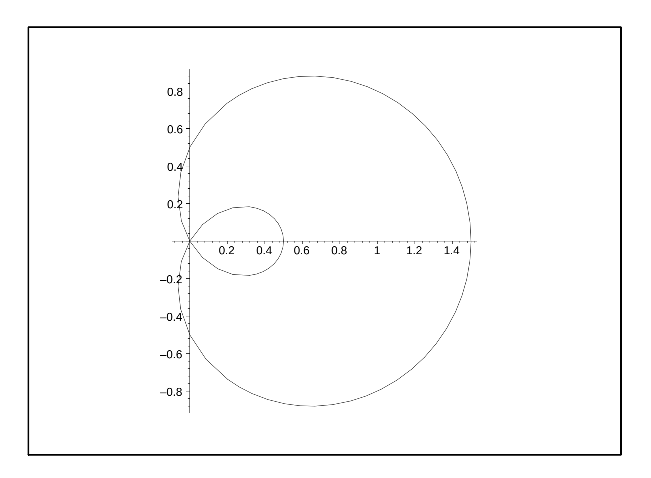
L'explication sommaire est que, dans la première version, le θ qui intervient dans ρ n'est pas le même que celui qui intervient dans la fonction.
Pour ma part, je préfère programmer avec des expressions, j'utilise les fonctions quand il faut faire varier un paramètre.

Exemple 2 (Tracé d'une famille de courbe). Voici d'abord une fonction qui permet de tracer le limaçon $\rho = \cos(\theta) + a$ pour des valeurs de a entrées par l'utilisateur.

```
>with(plots):
> des:=proc(a)
  polarplot([cos(theta)+a,theta,theta=-Pi..Pi],
  scaling=constrained) end;
>des(1/2)
```

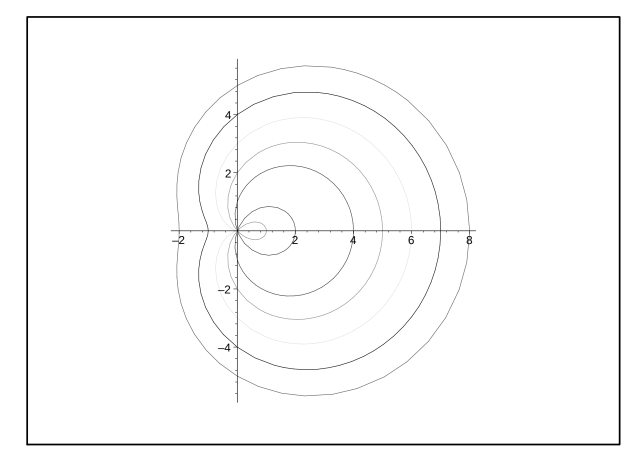
On obtient la courbe :





Supposons qu'on veuille tracer simultanément plusieurs courbes :

```
>f:=proc (a)
[3*cos(theta)+a, theta, theta = -Pi .. Pi] end;
>polarplot({seq(f(n),n=1..5)},scaling=constrained);
```



Pour ma part je préfère utiliser *display* qui fournit de moins belles couleurs mais qui permet de tracer des familles de courbes d'origines hétérogènes. On le verra plus loin.

2 Les commandes Maple

Il ne s'agit pas ici d'être exhaustif mais de préciser certains outils extrèmements importants.

2.1 La bibliothèque *linalg*

Les fonctions de cette bibliothèque sont utilisables à partir de la commande :

```
>with(linalg):
```

Remarque 1. Si l'on remplace les : par un ; on obtient une liste de toute les fonctions de la bibliothèque.

L'outil essentiel permettant de travailler avec des vecteurs et des points et la commande *vector* qui est analogue à une liste mais supporte les opérations algébriques et est compatible avec le type matrice.

Exemple 3 (Calcul d'un barycentre). -

```
>A:=vector([1,0,c]);
>B:=vector([a,1,b]);
>M:=evalm(2*A+3*B)/5);
```

$$M := \left[\frac{2}{5} + \frac{3}{5}a, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}c + \frac{3}{5}b\right]$$

Remarque 2 *(La commande evalm).* Un vecteur ou une matrice est généralement évalué en son nom. Si on veut accéder à tous ses coefficients, il faut utiliser la commande *evalm*.

Exemple 4 *(Un exemple de changement de repère).* On définit un repère $(\mathcal{R}) = (A, U, V, W)$ par ses coordonnées dans le repère canonique de $\mathbf{R}^3$. On en déduit d'abord la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base (U, V, W). :

```
>A:=vector([1,0,-1]);
>U:=vector([2,1,-3]);
>V:=vector([-1,1,0]);
>W:=vector([4,-1,2]);
>P:=transpose(matrix([U,V,W]));
```

$$P := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le produit matriciel est noté &∗. Si (X, Y, Z) sont les coordonnées d'un point M dans $(\mathcal{R})$, ses coordonnées dans le repère canonique de $\mathbf{R}^3$ sont données par :

```
>A+P&*vector([X,Y,Z]);
```

Mais ici, Maple ne fait que répéter la commande. Si on veut une évaluation effective du résultat il faut taper :

```
>evalm(A+P&*vector([X,Y,Z]));
```

qui retourne :

$$[1+2X-Y+4Z, X+Y-Z, -1-3X+2Z]$$

2.2 La fonction *map*

La fonction *map* est l'une des plus importantes de Maple. elle permet d'appliquer une fonction à tous les éléments d'une expression.

Exemple 5 (Effet de *map* sur une intégrale inerte). -

```
>J:=Int(1/((x-1)^3*(x ^2+x+2),x);
>map(convert,J,parfrac,x);
```

$$J := \int \frac{1}{(x-1)^3 (x^2+x+2)} dx$$

$$\int \frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{16} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{64} \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{64} \frac{-2+5x}{x^2+x+2} dx$$

Exemple 6 (Effet de *map* sur une matrice). -

```
>alias(j=RootOf(x^2+x+1,x));
>A:=matrix(3,3,[1+j,-1,1-j,0,j,j+2,1,j,-1]);
>B:=evalm(A^(-1));
>C:=map(evala,B);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1+j & -1 & 1-j \\ 0 & j & j+2 \\ 1 & j & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{j(3+j)}{5j+3j^2+j^3+2} & \frac{1-j+(j)^2}{5j+3j^2+j^3+2} & -\frac{-2j-2+j^2}{5j+3(j)^2+j^3+2} \\ -\frac{j+2}{5j+3j^2+j^3+2} & 2\left(5j+3j^2+j^3+2\right)^{-1} & \frac{(1+j)(j+2)}{5j+3(j)^2+j^3+2} \\ \frac{j}{5j+3j^2+j^3+2} & \frac{j+(j)^2+1}{5j+3j^2+j^3+2} & -\frac{(1+j)j}{5j+3j^2+j^3+2} \end{bmatrix}$$

La commande *evala* écrit tout élément de $\mathbf{C} = \mathbf{R}[j]$ sous la forme $aj+b$. On l'applique à tous les éléments de la matrice B et on obtient :

$$C := \begin{bmatrix} 3/2+1/2\,j & -1 & -3/2\,j \\ j+1/2 & -1-j & 1/2-1/2\,j \\ 1/2 & 0 & -1/2-1/2\,j \end{bmatrix}$$

Exemple 7 (Exemple de représentation d'une courbe paramétrique). -

```
>M:=vector([(t+1)/(t-1),1/(t^4-1)]);
>T:=map(normal,map(diff,evalm(M),t));
```

$$T := [-2(t-1)^{-2}, -4\frac{t^3}{(t^4-1)^2}]$$

Et, pour étudier la branche infinie quand $t \to 1$:

```
>DL:=map(series,evalm(M),t=1,3);
```

$$DL := [(2(t-1)^{-1}+1), (\frac{1}{4}(t-1)^{-1} - \frac{3}{8} + \frac{5}{16}(t-1) + O\left((t-1)^2\right))]$$

```
>series(8*M[2]-M[1],t=1,4);
```

$$(-4 + \frac{5}{2}(t-1) + O\left((t-1)^2\right))$$

D'où asymptote d'équation $8y - x + 4 = 0$ avec la position.

2.3 La fonction *solve*

Il est fortement conseillé d 'eviter l'assignation des résultats retournés par un appel à *solve* car cela rend les variables irrécupérables. La règle d'or est :

solve* s'utilise avec *subs

Si, par exemple, on veut récupérer les solutions d'une équation obtenues après une invocation du genre :

```
>sols:=solve(eq,{x, y});
```

Maple retourne un résultat de la forme :

$$sols = \{x = \dots, y = \dots\}$$

On peut reporter les valeurs de droite dans une expression *expr* qui contient x et y *via* une ligne de code du style :

```
>subs(sols,expr);
```

La substitution à x et y de leurs valeurs calculées aura alors une portée locale et non globale.

Exemple 8 (Intersection de deux droites affines). On écrit une fonction qui prend en argument deux équations de droites D_1 et D_2, de la forme $a\,x + b\,y + c$ et qui retourne leur point d'intersection sous forme d'un vecteur :

```
>inters:=proc(D1,D2)
subs(solve({D1,D2},{x,y}),evalm(vector([x,y])))
end;
>inters(2*x+3*y-1,x-y+1);
```

$$\left[-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$$

L'intérêt de cette méthode est que les variables x et y restent libres pour d'autres utilisations.

17 décembre 2008

2.4 Un exercice complet

Exemple 9. Soit (H) l'hyperbole d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

en repère orthonormé. Montrer qu'un cercle passant par $A(-a, 0)$ et le foyer $F(c, 0)$ recoupe (H) en les sommets d'un triangle équilatéral.

Démonstration. Calculons d'abord c. Pour l'hyperbole (H) : $c^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$ donc $c = 2a$. Traitons l'exercice en Maple :

1) Équation de l'hyperbole : dans le but de travailler avec différentes valeurs de a, en particulier pour le dessin, on introduira une fonction de a qui permettra un peu plus de souplesse.

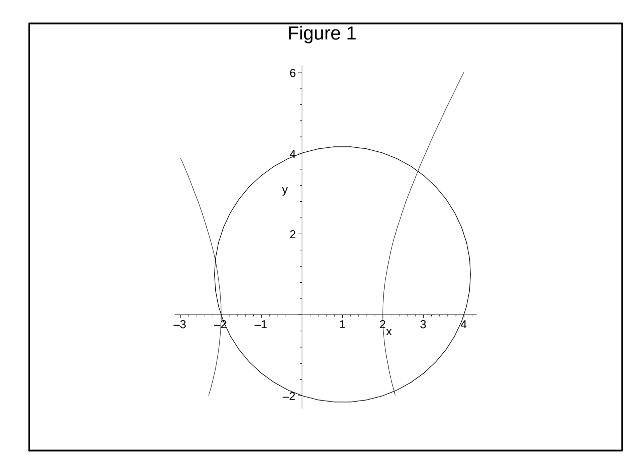
```
>with(plots):with(plottools):
>H:=a->x^2/a^2-y^2/(3*a^2)-1:
```

2) Dessin de l'hyperbole et du cercle pour $a = 2$: On stocke le dessin de l'hyperbole et du cercle dans des expressions de type "plot" qu'on termine avec : sous peine de voir s'afficher toute la structure. On choisit $a = 2$ pour le dessin :

```
>ploth:=implicitplot(H(2),x=-3..5,y=-2..6):
>C:=circle([1,1],sqrt(10)):
```

Voici l' affichage simultané des deux dessins en repère orthonormé grâce à la fonction *display* de la bibliothèque *plots* :

```
>display({ploth,C},title=‘Figure 1‘,scaling=constrained);
```



On pourrait raffiner l'affichage et nommer les sommets du triangle équilatéral mais, comme chacun sait, le mammouth est un animal paresseux.

3) Montrons que le triangle est équilatéral : Comme les points du triangle sont sur un cercle connu, la stratégie pour montrer qu'il est équilatéral peut, par exemple, consister à calculer les angles au centre des trois sommets. Pour cela il convient de paramétrer le cercle avec l'angle au centre correspondant à son point courant. L'abscisse du centre du cercle est $(2a-a)/2 = a/2$. Notons b son ordonnée.
Le paramétrage du cercle est alors donné par :

```
>u:=a/2+r*cos(t): v:=b+r*sin(t):
```

Le cercle passe par A ce qui conduit à l'ignoble relation $(3a/2)^2+b^2=r^2$ qu'il est préférable de **paramétrer** en écrivant qu'il existe une valeur de t soit ϕ pour laquelle $u=-a$, $v=0$, ce qui conduit à :

```
>a:=-2*r*cos(phi)/3: b:=-r*sin(phi):
```

L'équation en t aux intersections du cercle et de l'hyperbole s'écrit alors :

```
>eq:=subs({x=u,y=v},H(a));
```


$$eq := \frac{9}{4}\,\frac{(-\frac{1}{3}\,r\cos(\phi)+r\cos(t))^2}{r^2\cos(\phi)^2} - \frac{3}{4}\,\frac{(-r\sin(\phi)+r\sin(t))^2}{r^2\cos(\phi)^2} - 1$$

Reste à arranger cette équation :

```
>eq1:=normal(eq);
```

$$eq1 := -\frac{3}{4}\,\frac{\cos(\phi)^2+2\cos(\phi)\cos(t)-3\cos(t)^2+\sin(\phi)^2-2\sin(\phi)\sin(t)+\sin(t)^2}{\cos(\phi)^2}$$

La commande combine avec l'option *trig* permet la linéarisation de l'expression trigonométrique qui simplifie généralement les calculs :

```
>eq2:=combine(eq1,trig);
```

$$eq2 := \frac{-3\cos(\phi+t)+3\cos(2\,t)}{\cos(2\,\phi)+1}$$

Le numérateur se factorise à la main sous la forme :

$$-6\sin\left(\frac{3t+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{t-\phi}{2}\right)$$

Les angles t correspondant à l'intersection cherchée sont donc :

$$\begin{cases} t=\phi+2k\pi & \text{qui correspondent à } A \text{ ou} \\ t=-\phi/3+2k\pi/3 & \text{qui correspondent bien aux trois} \\ & \text{sommets d'un triangle équilatéral.} \end{cases}$$

□

Deuxième partie
Méthodes générales pour aborder un problème de géométrie analytique

3 Notations

On distinguera dans ce qui suit deux types de problèmes :

- Les problèmes affines qui seront traités dans un plan affine $\mathcal{E}_2$ *resp* un espace affine $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère **cartésien** $(\mathcal{R}) = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'axes (Ox, Oy) *resp* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ d'axes (Ox, Oy, Oz). **ce type de problème fait intervenir uniquement les notions d'alignement, de concours et de parallèlisme à l'exclusion de toute notion de longueur ou d'angle ; le repère $(\mathcal{R})$ est donc absolument quelconque et surtout pas orthonormé**. Quelques exemples simples de notions affines :
  - Le théorème de Thalès.
  - Les problèmes courants de barycentres.
  - Le concours des médianes d'un triangle.
- Les problèmes métriques (ou euclidiens) qui auront pour cadre un plan *resp* un espace euclidien $\mathcal{E}_2$ *resp* un espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$ dont l'espace vectoriel associé E_2 *resp* E_3 sera toujours supposé muni d'un produit scalaire. Les repères considérés seront toujours supposé orthonormés. Ce type de problème concerne les distances, les angles (dans ce dernier cas il conviendra si nécessaire d'orienter l'espace vectoriel associé et de choisir des repères directs, par exemple si interviennent des produits vectoriels). Quelques exemples :
  - Le concours des hauteurs d'un triangle (perpendicularité).
  - Le concours des médiatrices d'un triangle (distance).
  - Le concours des bissectrices intérieures d'un triangle (angles).

4 Deux exemples de mise en équation

Exemple 10 (Quadrilatère complet, première méthode).

Exemple 11 (Théorème de Feuerbach).

5 Utilisation de la symétrie

6 Méthode générale de recherche de lieu géométrique

Il s'agit de trouver analytiquement l'ensemble des points M du plan où de l'espace satisfaisant une propriété donnée. Il y a deux façons d'aborder un tel problème.

6.1 La méthode cartésienne

Elle consiste à partir du point $M \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ et d'écrire un système de conditions nécessaires et suffisantes pour que le point M appartienne à l'ensemble cherché qui aboutissent à une représentation cartésienne de cet ensemble sous la forme $f(x, y) = 0$.

Exemple 12. On se donne une sphère (S), un plan (Π) et un point A strictement extérieur à (S) et non situé sur Π. Quel est le lieu (C) des points d'intersection avec (Π) des droites tangentes à (S) et passant par A ?

Démonstration. Les étapes de résolution de ce problème sont les suivantes.

1) On commence par identifier le contexte Il y a une sphère, c'est donc un problème métrique.

2) On essaie d'identifier les symétries de la figure La droite (Δ) orthogonale à (Π) qui passe par le centre de (S) est un axe de révolution de $(S) \cup (\Pi)$ car toute rotation d'axe (Δ) stabilise (S) et (Π).

3) On choisit alors un repère judicieux On choisira (Δ) comme axe Oz et O sera le centre de (S). Quitte à faire tourner le repère autours de (Δ), on pourra aussi supposer que A appartient à l'un des plans de coordonnées par exemple au plan xOz.

4) On met les différents éléments de la figure en équation -

– La sphère (S) :
$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{1}$$
– Le plan (Π) :
$$z = h \tag{2}$$
– Le point A aura alors des coordonnées du type $(a, 0, c)$ avec les conditions :
$$a^2 + c^2 - R^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad c \neq h$$

5) On choisit un mode de traitement du problème On va choisir ici une **méthode cartésienne** de recherche du lieu, à savoir qu'on part d'un point $M(x, y, h)$ du plan (Π) et qu'on recherche un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur (x, y) pour que le point M appartienne au lieu (C) convoité. Pour cela on va écrire les équations paramétriques de la droite AM et on cherchera une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit tangente à (S).

a) Équations paramétriques de AM Si $P\,(X, Y, Z)$ est le point courant de AM, de paramètre t, il vient $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AM}$ *ie* :
$$\begin{aligned} X &= a + t(x - a) && (3)\\ Y &= ty && (4)\\ Z &= c + t(h - c) && (5) \end{aligned}$$

b) Tangence de AM et (S) Il suffit d'écrire que l'équation en t aux intersections de (S) et AM possède une racine double. Cette équation s'écrit :
$$(E) \qquad [a + t(x - a)]^2 + (ty)^2 + [c + t(h - c)]^2 - R^2 = 0$$

On va faire la suite des calculs en Maple :

```
>e:=(a+t*(x-a))^2+(t*y)^2+(c+t*(h-c))^2-R^2;
>T:=collect(e,t);
>d:=discrim(T,t);
```

$$e := (a + t\,(x - a))^2 + t^2y^2 + (c + t\,(h - c))^2 - R^2$$
$$T := \left((x - a)^2 + (h - c)^2 + y^2\right) t^2 + (2\,a\,(x - a) + 2\,c\,(h - c))\,t + a^2 - R^2 + c^2$$

$$d := -4\,c^2x^2 + 4\,x^2R^2 + 8\,hcxa - 8\,xR^2a - 4\,a^2h^2 - 8\,R^2hc + 4\,R^2y^2 - 4\,c^2y^2 + 4\,R^2a^2 + 4\,R^2h^2 + 4\,R^2c^2 - 4\,a^2y^2$$

Pour y voir plus clair on ordonne ce polynôme suivant les puissances de x et y :

```
>collect(d,{x,y});
```

$$\left(-4\,c^2 + 4\,R^2\right) x^2 + \left(8\,hca - 8\,R^2a\right) x + \left(-4\,c^2 + 4\,R^2 - 4\,a^2\right) y^2 - 4\,a^2h^2 - 8\,R^2hc + 4\,R^2c^2 + 4\,R^2a^2 + 4\,R^2h^2$$

qui est l'équation d'une conique d'axe focal Ox.

□

6.2 La méthode paramétrique

On choisit un (ou plusieurs) paramètre qui a une signification géométrique et on essaie d'exprimer le point courant de l'ensemble cherché en fonction de ce (ces) paramètre.

Exemple 13. Soient A et F deux points distincts d'un plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$. Lieu des sommets des paraboles de foyer F passant par A ?

Démonstration. On choisit F comme origine O et la droite OA comme axe Ox. On note $(a, 0)$ $(a \neq 0)$ les coordonnées de A. On travaille en coordonnées polaires. L'équation polaire générale d'une parabole de foyer O, qui se déduit d'une parabole d'axe Ox par une rotation d'angle $\phi \in \mathbf{R}$, est :
$$\rho = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \phi)}$$

Le sommet S est le point de coordonnées polaires $(p/2, \phi)$.
Le point A est sur la parabole si et seulement si **au moins un couple de coordonnées polaires de A en satisfait l'équation**, ce qui s'écrit :
$$\frac{p}{1 + \cos(\phi)} = a \quad \text{ou} \quad \frac{p}{1 - \cos(\phi)} = a$$

Le lieu cherché est donc réunion des deux courbes d'équations polaires :

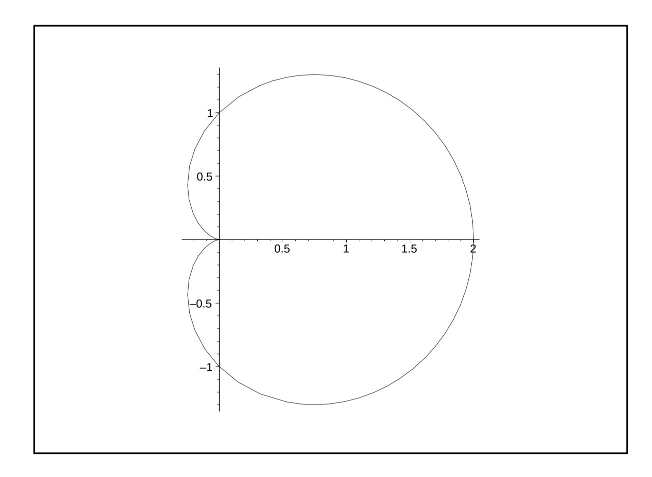
$$r = \frac{a}{2}(1+\cos\theta) \quad (6)$$
$$r = -\frac{a}{2}(1-\cos\theta) \quad (7)$$

mais si le point M possède un couple (r,θ) de coordonnées polaires qui vérifiént (7) alors le couple $(-r,\theta+\pi)$ **qui représente le même point** vérifie (6). Une équation polaire du lieu cherché est donc :

$$r = \frac{a}{2}(1+\cos\theta)$$

Il s'agit d'une cardioïde, représentée ci-aprés pour $a = 2$ en Maple :

```
>dom:=t=0..2*Pi:
>opts:=coords=polar,scaling=constrained:
>plot(1+cos(t),dom,opts);
```



□

Exercice 1 (Cen 2001). Traiter par les deux méthodes précédentes l'exercice suivant : Soit A un point fixe d'une parabole $(\mathcal{P})$. On mène de A deux droites orthogonales qui recoupent $(\mathcal{P})$ en P et Q. Quel est le lieu du milieu du segment $[P,Q]$ quand les deux droites varient ?

6.3 Lien entre les deux méthodes, l'élimination *vs* le paramétrage

Exemple 14 (Ccp 06 et 07 : comparaison des deux méthodes). Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer F et de sommet O. Une droite variable passant par F recoupe $(\mathcal{P})$ en deux points M et M'. Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMM' ?

Exemple 15 (Passage paramétrique cartésien).

Exemple 16 (Équation bifocale d'une ellipse).

Exemple 17 (Exemple de paramétrage d'une relation). Deux points A et B décrivent deux droites concourantes et distinctes de sorte que AB soit constant. Quel est le lieu du milieu de AB ?

Exemple 18 (Berlingots de lait). Deux points A et B décrivent deux droites orthogonales de sorte que AB soit constant. Quel est la surface balayée par le segment AB ? Volume intérieur ? Aire ?

Exercice 2 (Mines). Soient :

$$(\mathcal{D}) \quad : \quad x+y-a=0 \quad (8)$$
$$(\mathcal{C}_\lambda) \quad : \quad x^2+y^2-2\lambda x+a^2=0 \quad (9)$$

Quel est le lieu (Γ) des points M tels que le point P, intersection de la parallèle à Ox menée de M et du cercle $(\mathcal{C}_\lambda)$ auquel M appartient soit sur $(\mathcal{D})$?

Troisième partie
Géométrie plane

7 Équations d'une droite affine

Sauf mention contraire, le plan affine $\mathcal{E}_2$ est muni d'un repère affine $(\mathcal{R}) = (O,\vec{i},\vec{j})$. On étudie les diverses formes d'équation d'une droite (D).

7.1 Paramétriques

On se donne un point $M_0\,(x_0, y_0) \in (D)$ et un vecteur $\overrightarrow{V}\,(\alpha, \beta)$ directeur de (D), donc $(D) = A + \mathbf{R}\overrightarrow{V}$. Un système d'équations paramétriques de (D) est donc :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

7.2 Cartésiennes

Le point $M\,(x, y)$ appartient à (D) si et seulement si $\overrightarrow{M_0M} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{V})$ *ie* :

$$\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}\left(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \alpha & x - x_0 \\ \beta & y - y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad ie \quad -\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) = 0$$

Réciproquement toute équation de la forme :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

représente une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{U}\,(-b, a)$. Les autres équations cartésiennes de cette droite sont proportionnelles à celle ci.

Exemple 19. Tangente en un point régulier d'un arc paramétré.

Remarque 3 *(Droite joignant deux points sur les axes).* Il peut être utile de savoir qu'une équation de la droite joignant le point $A\,(a, 0)$ au point $B\,(0, b)$ avec $ab \neq 0$ est :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Exemple 20. Prouvons analytiquement le concours des hauteurs d'un triangle ABC du plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$.

Démonstration. On choisit BC comme axe Ox et la hauteur issue de A comme axe Oy. Les coordonnées des points A, B, C dans un repère $(\mathcal{R})$ orthonormé associé à ce choix d'axes sont du type :

$$A(0, a) \qquad B(b, 0) \qquad C(c, 0)$$

$a \neq 0$ car $A \notin BC$. Ecrivons une équation de la hauteur (H_B) issue de B : c'est la droite qui passe par $B\,(b, 0)$ et qui est orthogonale à $\overrightarrow{AC}\,(c, -a)$ *ie* :

$$(H_B) \qquad c(x - b) - ay = 0$$

Le point d'intersection de (H_B) et de Oy a donc pour ordonnée :

$$y = -\frac{bc}{a}$$

Comme cette expression est symétrique en b et c, c'est le point de concours des trois hauteurs du triangle. L'orthocentre H a donc pour coordonnées $(0, -bc/a)$. □

Remarque 4. C'est l'utilisation de bonnes notations qui permet d'exploiter la symétrie du problème en B et C. C'est souvent le cas en géométrie.

Remarque 5. Vérifier l'homogénéité (au sens de la physique) des calculs précédents.

Exercice 3 (Mines 2003). Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ et (C) la courbe d'équation $y = f(x)$ en repère orthonormé $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dont le point courant sera noté $M(x)$. La normale en $M(x)$ à (C) recoupe l'axe Ox en P et la perpendiculaire menée de P à Ox recoupe la tangente en $M(x)$ en Q. Déterminer les intervalles I maximaux et les fonctions f telles que l'ordonnée de Q soit constante.

Exercice 4 (Cen 99 et 2002). Dans le plan affine euclidien un point M décrit une normale fixe $(\mathcal{N}_0)$ à une parabole. Déterminer le lieu du milieu des pieds des deux autres normales issues de M lorsque celui ci varie sur $(\mathcal{N}_0)$.

7.2.1 Convention de notation

Soit (D) une droite dont une équation cartésienne dans le repère $(\mathcal{R})$est $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$. On conviendra de noter, pour tout point M de coordonnées (x,y) dans $(\mathcal{R})$ et, pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de composantes (ξ,η) dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ de E_2

$$D(M)=ax+by+c \qquad L(D)(\overrightarrow{V})=a\xi+b\eta$$

de sorte que, pour tout couple (M,M') de points de $\mathcal{E}_2$:

$$D(M')-D(M)=L(D)(\overrightarrow{MM'})$$

7.3 Faisceaux de droites

Proposition 1. *Soient (D) et (D') deux droites non parallèles de $\mathcal{E}_2$, A leur point d'intersection. On appelle faisceau de droites de base $((D),(D'))$ l'ensemble des droites Δ qui passent par A. Une telle droite possède dans $(\mathcal{R})$ une équation de la forme :*

$$\Delta=\alpha\,D+\alpha'\,D' \quad \textit{avec } (\alpha,\alpha')\neq(0,0)$$

où D resp D' est, dans $(\mathcal{R})$, une équation de (D) resp de (D').

Démonstration. Notons :

$$D(M)=ax+by+c \qquad D'(M)=a'x+b'y+c'$$

Pour M de coordonnées (x,y) dans $(\mathcal{R})$. Le non parallèlisme de (D) et (D') se traduit par :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\neq 0$$

Soit $(\alpha,\alpha')\neq(0,0)$. Posons :

$$a"=\alpha a+\alpha' a' \quad b"=\alpha b+\alpha' b' \qquad c"=\alpha c+\alpha' c'$$

donc :

$$\begin{pmatrix} a" \\ b" \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ est inversible et $(\alpha,\alpha')\neq(0,0)$. Donc en posant :

$$D"(M)=a"x+b"y+c"=\alpha\,D(M)+\alpha'\,D'(M)$$

l'équation $D"(M)=0$ est une équation de droite qui contient A puisque $D(A)=D'(A)=0$.
Réciproquement : soit (Δ) une droite qui passe par A. Prouvons l'existence d'un couple $(\alpha,\alpha')\neq(0,0)$ telqu'une équation de (Δ) soit $\alpha\,D+\alpha'\,D'$. Soit $B\in(\Delta)$ un point différent de A donc $(-D'(B),D(B))\neq(0,0)$. En vertu de l'étude directe, l'équation :

$$D"(M)=0 \quad \text{avec } D"=-D'(B)\,D+D(B)\,D'$$

est celle d'une droite $(D")$ qui passe par A mais on vérifie que :

$$D"(B)=-D'(B)\,D(B)+D(B)\,D'(B)=0$$

Donc $(D")$ contient A et B c'est donc (Δ).

Remarque 6. En pratique on prend $D+\lambda\,D'$ $(\lambda\in\mathbf{R})$ mais on perd ainsi la droite D'.

□

7.3.1 Mode d'emploi

La technique des faisceaux de droites est extrèmement puissante et élégante pour écrire des équations de droites rapidement **sans calcul de point d'intersection**.

Exemple 21. Dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé $(\mathcal{R})$, on considère les trois droites d'équation :

$$(D1) \qquad x+y-1=0$$
$$(D2) \qquad 2x-y+1=0$$
$$(D3) \qquad x-3y+2=0$$

Vérifier qu'elles forment un triangle et écrire une équation de la hauteur de ce triangle issue du point d'intersection de $(D1)$ et (D_2).

Démonstration. Soit $\overrightarrow{V_i}$ un vecteur directeur de (D_i). On peut prendre :

$$\overrightarrow{V_1}\,(-1,1) \qquad \overrightarrow{V_2}\,(1,2) \qquad \overrightarrow{V_3}\,(3,1)$$

qui sont deux à deux linéairement indépendants. Les droites sont donc deux à deux non parallèles. Prouvons qu'elles ne peuvent être concourantes. Si c'était le cas le système linéaire d'inconnues (x,y,z) :

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \\ x-3y+2z &= 0 \end{cases}$$

aurait une solution du type $(x,y,1) \neq (0,0,0)$ or :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

donc les droites sont non concourantes.
L'équation de la hauteur cherchée est de la forme :

$$a\,D_1(M) + b\,D_2(M) = 0 \quad (a,b) \neq (0,0)$$

Un vecteur orthogonal à cette droite est :

$$\overrightarrow{U}\,(a+2b, a-b)$$

Elle est orthogonale à (D_3) si et seulement si :

$$(a+2b) - 3(a-b) = 0 \quad ie \quad -2a+5b = 0$$

Le couple (a,b) est déterminé à un facteur multiplicatif prés, on peut prendre :

$$a = 5 \qquad b = 2$$

D'où une équation cherchée :

$$5\,D_1(M) + 2\,D_2(M) = 0 \quad ie \quad 3x+y-1 = 0$$

A titre d'exercice d'entraînement, les lecteurs pourront chercher les coordonnées de l'orthocentre de ce triangle. □

7.4 Partage d'un segment

Proposition 2. *Dans le plan affine $\mathcal{E}_2$, muni d'un repère cartésien $(\mathcal{R}) = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère une droite affine (D) d'équation $ax+by+c=0$, $(a,b) \neq (0,0)$. Pour $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$, posons $D(M) = ax+by+c$. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}_2$. On suppose que (D) coupe la droite AB en $M \neq B$ alors :*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{D(A)}{D(B)}$$

Démonstration. notons $\overrightarrow{D}$ l'application linéaire du plan vectoriel E_2 dans $\mathbf{R}$ associée à l'application affine D. Si $\overrightarrow{V} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{D}(V) = ax+by$ de sorte que, pour tout couple M, M' de points de $\mathcal{E}_2$ on ait $D(M') - D(M) = \overrightarrow{D}\left(\overrightarrow{MM'}\right)$. Posons alors :

$$\lambda = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \quad ie \quad \overrightarrow{MA} = \lambda\overrightarrow{MB}$$

en appliquant $\overrightarrow{D}$ à cette dernière relation, il vient :

$$D(A) - D(M) = \lambda\,(D(B) - D(M))$$

or $D(M) = 0$ d'où $D(A) = \lambda D(B)$ ce qu'on voulait. □

Exercice 5 (Centrale 2003). Soit A' le point d'intersection avec le coté BC de la bissectrice intérieure du triangle ABC relative au sommet A. En utilisant un repère cartésien judicieux, montrer que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{AB}{AC}$$

[Si vous avez du temps à perdre, essayez de retrouver cette relation géométriquement.] Prouver une relation analogue avec la bissecrice extérieure et retrouver ainsi le cercle d'Appolonius.

Exercice 6 (Quadrilatère complet, deuxième méthode). On considère, dans le plan affine, 6 points distincts A, B, C, D, E, E, F tels que :

i) les triplets (A,C,E), (A,B,D), (B,C,F), (D,E,F) sont constitués de points alignés.

ii) Les droites CD et BE se coupent en G.

iii) La droite FG recoupe AB en H et AC en I.

Prouver la relation :

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{FI}} = -\frac{\overline{GH}}{\overline{GI}}$$

[On pourra d'abord montrer qu'existent des équations D_i, $1 \leq i \leq 4$ des droites AB, AC, BC, DE telles que $\sum_{i=1}^{4} D_i = 0$]

8 Alignement de trois points

8.1 à l'aide des coordonnées cartésiennes

Proposition 3. *Le plan affine $\mathcal{E}_2$ est muni d'un repère cartésien $(\mathcal{R}) = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Trois points $M_1\,(x_1, y_1)$, $M_2\,(x_2, y_2)$, $M_3\,(x_3, y_3)$ sont alignés si et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration. Supposons les trois points alignés ; soit $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ l'équation d'une droite qui les contient : il vient :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où la nullité du déterminant proposé.
Réciproquement, supposons la nullité du déterminant, il existe $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or $(a, b) \neq (0, 0)$ car sinon c le serait aussi. La droite d'équation $ax+by+c = 0$ contient donc les trois points. □

Exemple 22 (Avec Maple). Dans un plan affine on considère trois points distincts A_1, A_2, A_3 appartenant à une droite (D) et trois points distincts B_1, B_2, B_3 appartenant à une droite $(\Delta) \neq (D)$. On pose, si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$:

$$C_i = A_jB_k \cap A_kB_j$$

en supposant que ces droites et ces points sont définis. Montrer que C_1, C_2, C_3 sont alignés.

Démonstration. Les lecteurs étudieront le cas où (D) et (Δ) sont parallèles à l'aide d'homothéties convenables. On suppose que (D) et (Δ) se coupent en O et on choisit un repère cartésien d'origine O, tel que $\vec{i}$ dirige (D) et $\vec{j}$ dirige (Δ). On note alors a_i l'abscisse de A_i et b_i l'ordonnée de B_i. L'équation de A_iB_j est alors :

$$\frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_j} - 1 = 0$$

On fait le reste en Maple. On trouve d'abord une formule générale pour le point d'intersection de deux droites :

```
>inters:=proc(a,b,c,d)
  local eq,incs,x,y;
  eq:={x/a+y/b-1,x/c+y/d-1};
  incs:={x,y};
  subs(solve(eq,incs),vector([x,y,1])) end;
```

On définit alors la matrice dont la nullité du déterminant prouvera l'alignement des C_i.

```
>A:=matrix([inters(a1,b2,a2,b1),inters(a1,b3,a3,b1),inters(a2,b3,a3,b2)]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{a2\ a1\ (b2-b1)}{a2\ b2-a1\ b1} & -\frac{b2\ b1\ (-a2+a1)}{a2\ b2-a1\ b1} & 1 \\ \frac{a3\ a1\ (b3-b1)}{a3\ b3-a1\ b1} & -\frac{b3\ b1\ (-a3+a1)}{a3\ b3-a1\ b1} & 1 \\ \frac{a3\ a2\ (b3-b2)}{a3\ b3-a2\ b2} & -\frac{b3\ b2\ (-a3+a2)}{a3\ b3-a2\ b2} & 1 \end{bmatrix}$$

```
>det(A);
```

$$0$$

□

Exercice 7. Montrer que les milieux des segments qui joignent les trois points d'intersection d'une droite avec les trois cotés d'un triangle aux sommets respectivement opposés sont alignés.

Exercice 8. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$, on considère un triangle ABC dont les cotés AB, BC, CA sont coupés par une droite (Δ) respectivement en D, E, F. Prouver que les orthocentres des triangles ABC, BDE, EFC sont alignés (on pourra prendre un repère orthonormé dont les axes sont la droite BC et la hauteur issue de A). *Question subsidiaire trés difficile : trouver une preuve géométrique de ce résultat. Une bouteille de champagne à qui trouve la première fois.*

Exercice 9 (Cen 99). On considère l'arc paramétré plan (C) défini en repère orthonormé par :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y = t\,x$$

1. Tracer (C).
2. Soient t_1, t_2, t_3 trois réels distincts. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les t_i pour que les trois points $M(t_i)$ soient alignés.
3. Soit $A(1,0)$. Une droite qui passe par A coupe (C) en M_1 et M_2. Montrer que le cercle de diamètre M_1M_2 est tangent à Ox en O.

8.2 En complexes

Les points d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration. Il suffit de se limiter au cas où les z_i sont distincts. En retranchant la troisième ligne aux deux autres, le déterminant s'écrit :

$$\begin{vmatrix} z_1 - z_3 & \overline{z_1} - \overline{z_3} & 0 \\ z_2 - z_3 & \overline{z_2} - \overline{z_3} & 0 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}$$

Sa nullité équivaut à :

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \overline{\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}}$$

Soit encore $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \in \mathbf{R}$, ce qui traduit bien l'alignement de ces trois points. □

On se borne à un exemple :

Exemple 23. Lieu des points M d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z, z^3 soient alignés.

Exercice 10. (Concours général 1999) Montrer que les symétriques des sommets d'un triangle par rapport aux cotés opposés sont alignés si et seulement si la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit est égale à son diamètre *[On pourra, par exemple, représenter le cercle circonscrit au triangle par le cercle unité* $\mathbf{U}$ *du plan complexe et observer que, si* $z \in \mathbf{U}$, $\overline{z} = 1/z$*].*

9 parallèlisme et concours

9.1 parallèlisme

Exercice 11 (Cen 2003). -

1. Tracer la courbe (C) d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$.
2. On oriente (C) et l'on note $\overrightarrow{T(\theta)}$ le premier vecteur du repère de Frénet au point $M(\theta)$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{T(\theta)}\right)$.
3. Montrer qu'existent, en général, trois points de (C) où la tangente est parallèle à une direction donnée. Que dire de leur isobarycentre ?

9.2 Concours de trois droites

Exemple 24 (Ccp 98). Dans un plan affine $\mathcal{E}_2$, on considère les milieux A', B', C' des cotés BC, CA, AB d'un triangle ABC. Les symétriques d'un point M par rapport à A', B', C' sont notés A", B", C". Vérifier que les droites AA", BB", CC" sont concourantes ou parallèles.

Démonstration. C'est un problème affine. On peut le traiter dans un repère cartésien quelconque. Prenons $(\mathcal{R}) = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Il vient :

$$A'(1/2, 1/2), \quad B'(0, 1/2), \quad C'(1/2, 0)$$

d'où, si $M(x,y)$:

$$A"(1-x, 1-y), \quad B"(-x, 1-y), \quad C"(1-x, -y)$$

$$AA" : -(1-y)X + (1-x)Y = 0$$
$$BB" : (y-1)(X-1) - (1+x)Y = 0$$
$$CC"(y+1)X + (1-x)(Y-1) = 0$$

Il s'agit de droites si $(x, y) \neq (1, 1)$, $(x, y) \neq (-1, 1)$, $(x, y) \neq (1, -1)$, ce qui sera supposé dans la suite. On regarde le déterminant formé des coefficients de ces équations de droites :

$$D = \begin{vmatrix} y-1 & 1-x & 0 \\ y-1 & -(1+x) & 1-y \\ (y+1) & (1-x) & x-1 \end{vmatrix}$$

On vérifie aisèment que $D = 0$. Donc les trois droites forment un faisceau. Les lecteurs étudieront eux mêmes les cas pour lesquels ces droites sont parallèles. □

Exercice 12. Même exercice que le précédent en supposant le plan euclidien, le triangle ABC équilatéral et en prenant les symétriques de M par rapport aux cotés d'icelui. *[On peut tenter d'utiliser les complexes, cf supra]*.

Exercice 13 (Centrale 2007). Dans le plan affine on considère deux droites de (D) et $D')$ sécantes en O. Soit $A \in (D)$ et $A' \in (D')$. Pour tout point M du plan on définit N (*resp* N') comme le point d'intersection de (D) et de la parallèle à (D') passant par M (*resp* le point d'intersection de (D') et de la parallèle à (D) passant par M). Soit P le point d'intersection de (AN') et $(A'N)$, montrer que les droites MP passent par un point fixe.

Exercice 14. Montrer que l'isobarycentre des pieds de trois normales à une parabole qui sont concourantes est sur l'axe de la parabole.

Exercice 15 (Cen 99, 2001). Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé d'axes (Ox, Oy). Soient trois points A, B, C d'abcisses respectives a, b, c appartenant à l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation $xy = 1$.

1. Montrer que l'orthocentre du triangle ABC appartient à $(\mathcal{H})$.
2. Soient (α), (β), (γ) les perpendiculaires à BC, CA, AB qui contiennent les points d'intersection respectifs de ces droites avec Ox. Montrer que (α), (β), (γ) concourent en un point I. En remplaçant Ox par Oy on obtient de même un point I'.
3. Calculer les produits scalaires :
$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI'} \qquad \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BI'} \qquad \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CI'}$$
4. Soit O' le symétrique de l'orthocentre du triangle ABC par rapport à O. Montrer que A, B, C, O' sont cocycliques.

Exercice 16 (X 2000). Soit ABC un triangle équilatéral du plan affine euclidien. On note I, J, K les milieux respectifs de AB, BC, CA. On définit respectivement sur les côtés AB, BC, CA, trois points M, N, P par :

$$\overline{IM} = x \qquad \overline{JN} = y \qquad \overline{KP} = z$$

Montrer qu'il existe un point O du plan dont les projections orthogonales sur les trois côtés sont M, N, P si et seulement si $x + y + z = 0$.

10 Problèmes d'angles et de distances

10.1 Lignes trigonométriques d'un angle

Proposition 4. *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs* **non nuls** *d'un plan* **vectoriel** *euclidien* **orienté** $(E_2, (\mid))$. *Une mesure* θ *de l'angle* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *modulo* 2π, *est déterminée par la connaissance* **des deux** *lignes trigonométriques* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$ *ou, ce qui revient au même, par la connaissance de* $e^{i\theta}$. *Il vient alors :*

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})}{||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}{||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||}$$

On rappelle que la notation $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *désigne le déterminant du système de vecteurs* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *dans une quelconque base orthonormée* **directe** *de* E_2.

Démonstration. Normalement vu en première année. □

Exemple 25. Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$ dont la direction est notée E_2. Il existe une orientation de E_2 telle que :

$$\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0, \quad \sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) > 0, \quad \sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) > 0$$

Donc, en notant $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les mesures, appartenant à $[0, \pi]$, des angles aux sommets du triangle ABC, il vient, pour l'orientation ci-dessus :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \hat{A} \mod 2\pi \quad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \hat{B} \mod 2\pi \quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \hat{C} \mod 2\pi$$

On en déduit :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

Démonstration. Choisissons d'abord une orientation arbitraire (c'est à dire une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ décrétée directe) de E_2. Comme A, B, C sont non alignés, $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$. Si ce réel est négatif on choisit l'orientation opposée de E_2 (c'est à dire qu'on décrète que les bases directe seront les bases orthonormales de même sens que $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$). On dispose ainsi d'une orientation de E_2 telle que :

$$\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0 \quad ie \quad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$$

Or :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$$

On en déduit que $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) > 0$. manipulation analogue pour établir que $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) > 0$. Posons alors :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \mod 2\pi \quad \beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \mod 2\pi \quad \gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \mod 2\pi$$

Il vient, puisque les mesures $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ sont déterminées par leurs cosinus :

$$\cos \hat{A} = \cos \alpha, \quad \cos \hat{B} = \cos \beta, \quad \cos \hat{C} = \cos \gamma$$

Comme $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ appartiennent à $[0, \pi]$ et que les sinus de α, β, γ sont positifs, il vient :

$$\sin \hat{A} = \sin \alpha, \quad \sin \hat{B} = \sin \beta, \quad \sin \hat{C} = \sin \gamma$$

et donc :

$$\alpha = \hat{A} \mod 2\pi \quad \beta = \hat{B} \mod 2\pi \quad \gamma = \hat{C} \mod 2\pi$$

On en déduit :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \mod 2\pi$$

Comme $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \mod 2\pi$, la relation de Chasles pour les angles orientés assure que :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) = \pi \mod 2\pi$$

Donc, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi + 2k\pi$$

et

$$0 < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$$

donc cette somme vaut bien π. □

17 décembre 2008

Exercice 17 (Centrale 2007). On considère un triangle équilatéral ABC du plan euclidien. Si M est un point du plan, on note P, Q, R ses projections orthogonales sur les côtés (AB), (AC), (BC) .

1. Calculer $MP + MQ + MR$ si M est intérieur au triangle.
2. Comment évolue cette somme si M n'est plus intérieur au triangle ?

10.2 Distance d'un point à une droite

10.2.1 Expression de la distance

Dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$, muni d'un repère orthonormé, l'expression de la distance du point $M(x, y)$ à la droite (D) d'équation :

$$ax + by + c = 0 \qquad (a, b) \neq (0, 0)$$

est donnée par :

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercice 18 (Centrale 2005). Pour t réel, on considère la droite $(\mathcal{D}_t)$ d'équation cartésienne $(1 - t^2)\, x + 2t\, y = 2 + 4t$.

1. Montrer qu'il existe un point Ω équidistant de toutes les droites $(\mathcal{D}_t)$, t réel.
2. Interprétation géométrique ?

10.2.2 Équation normale

Soit $\mathcal{E}_2$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(\mathcal{R}) = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit (D) une droite de ce plan. Notons (p, θ) un couple de coordonnées polaires de la projection H du point O sur (D). Une équation de (D) dans $(\mathcal{R})$ est donnée par :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$

Une telle équation est appelée *équation normale* de la droite (D)[2].

[2]Vifs remerciements à Alain Chillès pour le dessin qui suit

Démonstration. Posons $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$. Si $M(x,y)$ est un point quelconque de $\mathcal{E}_2$ dont K est la projection orthogonale sur la droite affine $O + \text{Vect}(\overrightarrow{u(\theta)})$, il vient :

$$\overline{OK} = (\overrightarrow{u(\theta)}|\overrightarrow{OM}) = x\cos\theta + y\sin\theta$$

or $M \in (D)$ si et seulement si $K = H$ *ie*

$$x\cos\theta + y\sin\theta = \overline{OK} = \overline{OH} = p$$

ce qu'on voulait. □

10.2.3 Mode d'emploi

L'équation normale d'une droite (D) porte **toutes les informations métriques relatives à la droite** (D), en particulier :
- Angle de (D) avec une autre droite (Δ) donnée sous la même forme.
- Distance d'un point M à la droite (D).

Pour ces raisons, **dans tout problème de géométrie faisant intervenir des données métriques relatives à une droite, il est impératif de se donner une équation d'icelle sous forme normale**. A titre d'exemple traitons le problème des podaires : lieu des projections d'un point sur les tangentes à une courbe :

Exemple 26. Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}_2$ est muni d'unrepère orthonormédirect $(\mathcal{R}) = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On demande de trouver le lieu (L) des projections de O sur les tangentes à la spirale logarithmique (S) d'équation très :

$$\rho = a\,e^{\lambda\theta} \quad a \neq 0, \lambda \neq 0$$

Démonstration. □

La Méthode consiste à trouver une équation normale de la tangente à (S) sous la forme :

$$x\cos\phi + y\sin\phi - p$$

D'aprés l'étude ci dessus, un couple de coordonnées polaires de la projection H de O sur cette tangente est (p,ϕ), ce qui fournit une équation très de (L).

Tangente dans le repère local : dans le repère $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$, un vecteur directeur de la tangente à (S) au point $M(\theta)$ est :

$$\frac{d\rho}{d\theta}\overrightarrow{u(\theta)} + \rho\overrightarrow{v(\theta)} = a\,e^{\lambda\theta}\left(\lambda\overrightarrow{u(\theta)} + \overrightarrow{v(\theta)}\right)$$

On peut donc prendre comme vecteur directeur de la tangente :

$$\overrightarrow{w(\theta)} = \lambda\overrightarrow{u(\theta)} + \overrightarrow{v(\theta)}$$

C'est un vecteur dont les coordonnées dans le repère local sont fixes. On peut le normer :

$$\overrightarrow{w(\theta)} = \sqrt{1+\lambda^2}\left(\cos V\,\overrightarrow{u(\theta)} + \sin V\,\overrightarrow{v(\theta)}\right) = \sqrt{1+\lambda^2}\,\overrightarrow{T(\theta)}$$

Où l'on a posé :

$$\cos V = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \qquad \sin V = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

L'angle V est constant et mesure modulo 2π l'angle $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{T(\theta)})$. Donc :

$$\alpha = \theta + V = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T(\theta)})$$

L'équation de la tangente à (S) au point $M(\theta)$ est, dans $(\mathcal{R})$:

$$-\sin\alpha(x - \rho\cos\theta) + \cos\alpha(y - \rho\sin\theta) = 0$$

soit :

$$\cos(\alpha + \pi/2)\,x + \sin(\alpha + \pi/2)\,y + \rho\cos(\alpha - \theta) = 0$$

$$\cos(\alpha + \pi/2)\,x + \sin(\alpha + \pi/2)\,y + a\,\mathrm{e}^{\lambda\theta}\cos(V) = 0$$

Posons $\alpha + \pi/2 = \phi$. L'équation d'une tangente quelconque à (S) se paramètre à l'aide de ϕ sous la forme normale :

$$x\,\cos\phi + y\,\sin\phi - p(\phi) = 0$$

avec

$$p(\phi) = -a\cos V\,\mathrm{e}^{\lambda(\phi - V - \pi/2)} = k\,\mathrm{e}^{\lambda\phi}$$

avec $k = -a\cos V\,\mathrm{e}^{-\lambda V - \lambda\pi/2} \neq 0$. Le lieu (L) a pour équation polaire dans $(\mathcal{R})$:

$$r = k\,\mathrm{e}^{\lambda\phi}$$

C'est une spirale logarithmique homothétique à (S).

10.2.4 Application à l'équation d'une conique

Dans certains problèmes de géométrie, il peut être utile de savoir former l'équation d'une conique dont l'axe focal *ie* la droite qui passe par un foyer, orthogonale à la directrice, n'est pas parallèle à l'un des axes de coordonnées. Si $F(a, b)$ est un foyer, (D) la directrice associée, $e > 0$, l'excentricité, la conique (C) est alors l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$MF = eMH \Longleftrightarrow MF^2 = e^2\,MH^2$$

avec $MH = \mathrm{d}(M, (D))$. **Il y a donc tout intérêt à se donner l'équation de (D) sous forme normale :**

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$

puisqu'àlors $MH = |x\cos\theta + y\sin\theta - p|$. L'équation de (C) prend alors la forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = e^2(x\cos\theta + y\sin\theta - p)^2$$

avec :

$$F \notin (D) \quad ie \quad a\cos\theta + b\sin\theta - p \neq 0$$

Traitons un exemple :

Exemple 27. Trouver le lieu d'un foyer F d'une hyperbole équilatère(H) qui passe par deux points fixes dont l'un est le sommet relatif à F.

Démonstration. On choisit comme origine O le sommet fixe et comme axe Ox la droite qui joint les deux points fixes de sorte que l'autre point fixe A a pour coordonnées $(a, 0)$. On se donne le foyer F cherché par un système de coordonnées polaires (r, θ). Comme la droite OF est perpendiculaire à la directrice (D), celle ci a une équation normale de la forme :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$

Enfin on observera qu'une hyperbole est équilatère si et seulement si son excentricité vaut $\sqrt{2}$ car, avec les notations habituelles :

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{donc } a = b \Leftrightarrow c/a = \sqrt{2}$$

On traite l'exercice en Maple :

```
>MF2:=(x-r*cos(theta))^2+(y-r*sin(theta))^2;
```

$$MF2 := (x - r\cos(\theta))^2 + (y - r\sin(\theta))^2$$

```
>MH2:=(x*cos(theta)+y*sin(theta)-p)^2;
```

$$MH2 := (x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - p)^2$$

```
>eq:=MF2-2*MH2;
```

$$eq := (x - r\cos(\theta))^2 + (y - r\sin(\theta))^2 - 2\,(x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - p)^2$$

L'équation $eq = 0$ est celle d'une hyperbole équilatère de foyer F et de directrice (D). O est sur l'axe focal. Écrivons que c'en est un sommet :

```
>cond1:=simplify(subs({x=0,y=0},eq),trig);
```

$$cond1 := r^2 - 2\,p^2$$

Comme F et le pied de (D) sur la droite OF sont de part est d'autre de O, on choisit :

```
>eq1:=subs(p=-r/sqrt(2),eq);
```

$$eq1 := (x - r\cos(\theta))^2 + (y - r\sin(\theta))^2 - 2\,(x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + \frac{1}{2}\,r\,\sqrt{2})^2$$

Écrivons maintenant que (H) passe par $A(a, 0)$.

```
>cond:=subs({x=a,y=0},eq1);
```

$$cond := (a - r\cos(\theta))^2 + r^2\sin(\theta)^2 - 2\,(a\cos(\theta) + \frac{1}{2}\,r\,\sqrt{2})^2$$

L'équation polaire du lieu cherché est donc : $cond = 0$. Essayons de simplifier $cond$:

```
>cond2:=simplify(cond,trig);
```

$$cond2 := a^2 - 2\,r\cos(\theta)\,a - 2\,a^2\cos(\theta)^2 - 2\,r\cos(\theta)\,a\,\sqrt{2}$$

```
>cond3:=combine(cond2,trig);
```

$$cond3 := -2\,r\cos(\theta)\,a - \cos(2\,\theta)\,a^2 - 2\,r\cos(\theta)\,a\,\sqrt{2}$$

On voit que r va s'exprimer simplement en fonction de θ :

```
>rho:=subs(r=solve(cond3,r),r);
```

$$\rho := -\frac{1}{2}\,\frac{a\cos(2\,\theta)}{\cos(\theta)\,(\sqrt{2}+1)}$$

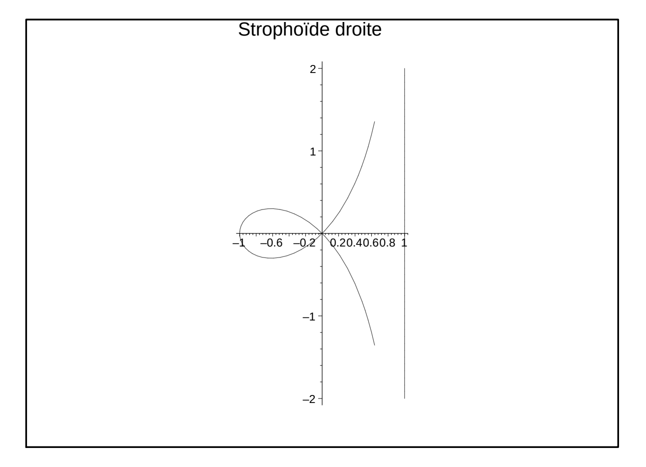
On choisit une valeur simple de a. L'intervalle réduit est $[0, \pi/2[$ et il y a une asymptote verticale. Pour tracer l'intégralité de la courbe, il suffira de prendre $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ puisque $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$. En revanche, pour que Maple puisse faire un dessin non écrabouillé, il convient de prendre un intervalle de tracé où r ne de vienne pas trop grand (mais suffisamment pour qu'on ait une idée de la courbe). Après quelques essais on a choisi $[-9\pi/25, 9\pi/25] \subset]-\pi/2, \pi/2[$.

```
>with(plots):
>rho:=subs(a=2*(sqrt(2)+1),rho);
>interv:=-9*Pi/25..9*Pi/25;
```

$$\rho := -\frac{1}{2}\,\frac{(2\,\sqrt{2}+2)\cos(2\,\theta)}{\cos(\theta)\,(\sqrt{2}+1)}$$

$$interv := -\frac{9}{25}\,\pi..\frac{9}{25}\,\pi$$

```
>courbe:=plot([rho,theta,theta=interv],coords=polar):
>asymptote:=plot([1,t,t=-2..2]):
>res:=display({courbe,asymptote},scaling=constrained):
>res;
```



Cette courbe est appelée *strophoïde droite*. □

Exercice 19 (Mines 98).

Soient B et F deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{L}')$ des sommets des paraboles de foyer F passant par B. Le tracer.

Exercice 20 (Centrale 2001). Dans un plan affine euclidien on considère un point A et un cercle $(\mathcal{C})$.

1. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{L})$ des projections orthogonales de A sur les tangentes à $(\mathcal{C})$.
2. Tracer $(\mathcal{L})$ avec l'ordinateur.
3. Calculer la longueur de $(\mathcal{L})$.

Exercice 21. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$, muni d'un repère orthonormé $(\mathcal{R}) = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, trouver le lieu des foyers des paraboles passant par le point $A(2,3)$ et tangentes aux axes de coordonnées.

10.3 Cercles

10.3.1 Équation de cercle

cf cours de première année

Exercice 22 (CCP 2001). Calculer le centre et le rayon du cercle de l'espace affine euclidien défini par :

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 23 (Cen 99 et Ccp 2006). Une droite passant par le foyer d'une parabole, de sommet S, la recoupe en M et N. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle SMN ?

10.3.2 Arc capable

cf cours de première année

10.3.3 Cercle d'Apolonius

cf cours de première année. N'est plus au programme PC.

10.3.4 Cocyclicité analytique de quatre points dont trois ne sont pas alignés

On se borne à un exemple et deux applications.

Exemple 28. Dans un plan affine euclidien on se donne trois points $(M_i)_{1\leq i\leq 3}$ avec $M_i(x_i, y_i)$. démontrer que le point $M(x,y)$ appartient au cercle circonscrit à ces trois points si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 24 (Mines 99). Soit ABC un triangle équilatéral. Étudier les valeurs prises par l'expression :

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

lorsque P décrit le cercle inscrit à ce triangle.

Exercice 25 (Centrale 2000, 2001, 2003). -

1. Soit un triangle tel que son centre de gravité soit confondu avec le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Montrez que ce triangle est équilateral.
2. Soit (H) une hyperbole équilatère centrée en O. Soient P et Q deux points de (H) symétriques par rapport a O. On considère le cercle (C) de centre P et de rayon PQ. Il recoupe (H) en trois points : M_1, M_2, M_3. Montrez que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilateral et de centre P.

Exercice 26 (Centrale). -

1. Soient deux droites (D) et (Δ) qui se coupent orthogonalement en O ; A, A' deux points sur (D), B, B' deux points sur (Δ). Montrer que A, A', B, B' sont cocycliques si et seulement si :

$$\overline{OA}\,.\,\overline{OA'} = \overline{OB}\,.\,\overline{OB'}$$

2. Déterminer le lieu des points d'où on peut mener à une ellipse deux tangentes qui coupent les axes en quatre points cocycliques.

Exercice 27 (Maple obligatoire). Théorème de Feuerbach : Dans un triangle le cercle d'Euler *[cercle circonscrit au triangle constitué par les pieds des hauteurs qui contient également les milieux des côtés]* est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.

Exercice 28 (Ens). Trouver l'ensemble des isométries du plan qui conservent la réunion de deux cercles dont les centres sont non confondus et les rayons différents.

10.4 Utilisation des complexes

10.4.1 Généralités

Le plan affine euclidien orienté est muni d'unrepère orthonormé direct $(\mathcal{R}) = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par rapport auquel sont considérés les affixes des points et des vecteurs. Si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ sont trois points distincts alors :

$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|, \qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \operatorname{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$$

Exemple 29. Avec les notations ci-dessus, un triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si :

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{avec } j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$

Il est équilatéral de sens quelconque si :

$$-ba - ca - cb + a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

Démonstration. ABC est équilatéral direct si et seulement si :

$$\frac{AC}{AB} = 1, \quad \text{et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$$

Ce qui se traduit, en complexes, par :

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1, \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$$

Ces deux dernières relations se traduisent en une seule :

$$\frac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = -j^2$$

soit, compte tenu de la relation $1 + j + j^2 = 0$:

$$(c-a) + j^2(b-a) = 0 \quad ie \quad c + j^2 b + ja = 0$$

équivalente à la relation cherchée par multiplication par j^2.
La suite en Maple :


```
>alias(j=RootOf(x^2+x+1,x));
>evala(expand((a+b*j+c*j^2)*(a+b*j^2+c*j)));
```

$$I, j$$
$$-ba - ca - cb + a^2 + b^2 + c^2$$

□

Exercice 29 (Classique). Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, on construit sur les cotés AB, BC, CD, DA, et extérieurement, des carrés de centres respectifs P, Q, R, S. Montrer que les segments PR et QS sont orthogonaux et de même longueur.

Exercice 30 (X et Centrale 2002). Dans un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé, déterminer le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans la parabole d'équation $y^2 = 2px$. *[On suggère de considérer l'intersection du cercle circonscrit à un tel triangle avec la parabole. On pourra paramétrer ce cercle sous la forme :]*

$$x = x_0 + \frac{R}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \qquad y = y_0 + \frac{R}{2\mathrm{i}}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

Où R est un réel et u un complexe de module 1.

10.4.2 Bissectrice (s) d'un angle

Proposition 5. *Soient trois points A, B, C distinct d'un plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}_2$. L'ensemble des points $M \neq A$ tels que :*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) \mod 2\pi$$

Est constitué d'une droite D, privée de A, qui s'appele bissectrice de l'angle des demi droites ou des vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. L'ensemble des points $M \neq A$ tels que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) \mod \pi$$

Est constitué de l'union de deux droites orthogonales D et Δ, privées de A, qui s'appelent les bissectrices de l'angle des droites (AB, AC).

Démonstration. Compte tenu de la relation de Chasles pour les angles orientés de vecteurs, il vient, en notant θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\theta}{2} + k\pi$$

Dans le deuxième cas :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) + k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{2}$$

□

Exercice 31. (Cen 99) Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ en repère orthonormé. On la paramètre à l'aide de $t = y$ et on note $(\mathcal{D}_t)$ la tangente à $(\mathcal{P})$ au point $M(t)$. Donner l'équation des bissectrices de Ox et $(\mathcal{D}_t)$. En déduire le lieu des centres des cercles tangents à l'axe Ox et à $(\mathcal{P})$.

Voyons maintenant un exemple de calcul en complexes.

Exemple 30. On se donne trois points distincts O, A, B, non alignés dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}_2$. trouver le lieu (S) des points $M \in \mathcal{E}_2$ tels que l'une des bissectrices de l'angle (MA, MB) passe par O.

Démonstration. On choisit un repère $(\mathcal{R}) = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que l'axe Ox soit la bissectrice de l'angle de demi droites $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On note $a = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $b = r_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ les affixes de a et b. On pose aussi :

$$p = ab = r_1 r_2, \qquad s = a + b = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$

Soit $M(z)$ un point différent de O, A, B. La condition voulue s'écrit :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) \mod \pi$$

qui se traduit en complexes par :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-z}{a-z}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{b-z}{-z}\right) \mod \pi$$

Soit encore :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}\right) = 0 \mod \pi$$

Cette dernière condition est équivalente à la réalité du complexe $\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}$, ce qui s'écrit :

$$\frac{(z-a)(z-b)}{z^2} = \overline{\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}}$$

Soit encore :

$$\overline{z}^2(z^2 - sz + p) - z^2(\overline{z}^2 - \overline{sz} + p) = 0$$
$$z\overline{z}(\overline{s}z - s\overline{z}) - p(z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 0$$

Posons $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. La relation ci-dessus s'écrit encore :

$$\rho^2\, 2\,\mathrm{i}\ \operatorname{Im}(\overline{s}z) - 4\,\mathrm{i}\,p\ \operatorname{Im}(z)\ \operatorname{Re}(z) = 0$$

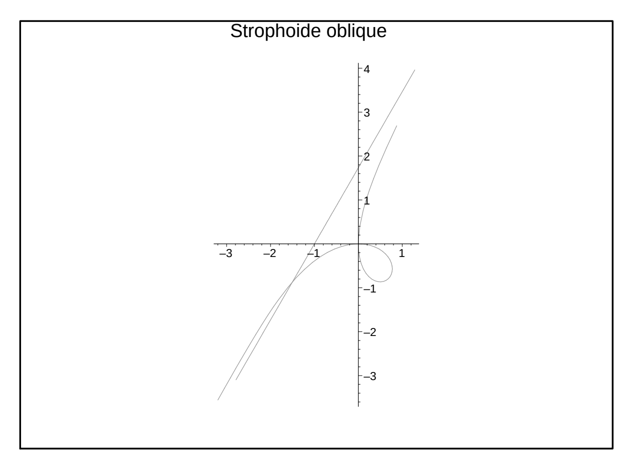
Soit encore :

$$\rho^3\ \operatorname{Im}\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\phi)}\right) - 2p\,\rho^2\,\sin\theta\,\cos\theta = 0$$
$$\rho^2\ [\rho r \sin(\theta - \phi) - p\sin(2\theta)] = 0$$

Ce qui donne finalement, en rajoutant le point O à (S) :

$$\rho = \frac{p\sin 2\theta}{r\sin(\theta - \phi)}$$

qui est une équation polaire de (S). La figure ci-dessous est obtenue en Maple pour $\phi = \pi/3$, $p = r$. Il s'agit d'une strophoïde oblique que les lecteurs étudieront en détail.



□

Exercice 32. Le plan affine euclidien orienté est muni d'un repère orthonormé direct de centre O. Quels sont les complexes z tels que le cercle inscrit au triangle dont les sommets ont pour affixes z, z^2, z^3 admette O pour centre ?

Exercice 33 (CCP 2002). Déterminer le lieu des points du plan affine euclidien dont l'affixe z, en repère orthonormé, vérifie :

$$\frac{z+2\mathrm{i}+3}{z-2\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbf{R}$$

Exercice 34 (Mines 2000). Trouver l'image de l'ensemble des points du plan complexe défini par $1 \leq |z| \leq 2$ par la transformation $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Exercice 35 (Ccp). Image du demi plan $y>0$ par la transformation géométrique dont la forme complexe est :

$$z \mapsto \frac{z-2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$$

Exercice 36 (Ccp 99). Soit z un complexe tel que $|z^2-1/2| < 1/2$. Montrer que $|z-1/3| < 1/3$.

Exercice 37 (Centrale 2003). Condition sur $z \in \mathbf{C}$ pour que les points d'affixes $1, z, z^2, z^{-1}$ forment un carré.

11 Courbes planes

11.1 Études de courbes

11.1.1 Paramétriques

Sauf mention du contraire, on se place dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(\mathcal{R})$.

Exercice 38 (Ccp 2008). On se donne la courbe paramétrée d'équations :

$$\begin{cases} x(t) &= t^3-at \\ y(t) &= t^2-bt \end{cases}$$

Donner les conditions sur a et b pour que la courbe admette un point double.

Exercice 39 (Ccp 98). Étudier, lorsque t est au voisinage de 0, la courbe :

$$\begin{cases} x &= \mathrm{e}^t-1-t-\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^3}{3} \\ y &= \mathrm{e}^{t^2}-t^2 \end{cases}$$

Exercice 40 (Ccp 2000). Même question que le précédent avec :

$$\begin{cases} x &= \alpha\cos t-t^3 \\ y &= \beta\sin t-\dfrac{t}{6}+t^2 \end{cases}$$

Exercice 41 (Ccp 2001). Étude et tracé de la courbe :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+1} \\ y(t) &= \dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t-1} \end{cases}$$

Exercice 42 (Centrale 2004). Étude et tracé de la courbe :

$$\begin{cases} x(t) &= 2t+t^2 \\ y(t) &= 2t-\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Points singuliers ? Asymptotes ? Points doubles ?

Exercice 43 (Ccp 2004). Étude et tracé de la courbe :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{t}+\ln(2+t) \\ y(t) &= t+\dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Exercice 44 (Ccp 98). Tracer la courbe

$$\begin{cases} x &= \dfrac{t^3}{1+t^3} \\ y &= \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

11.1.2 Polaires

Exercice 45 (Ccp 98). Étudier les asymptotes de :

$$\rho = \frac{\theta}{\theta-1}$$

Exercice 46 (Tpe 2000). Étudier la courbe :

$$\rho = \frac{1}{\sin 2\theta}$$

Exercice 47 (Centrale 2004). Étudier la courbe en polaire :

$$\rho = \frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$$

Précisez les points à tangente horizontale.

Exercice 48 (Centrale 2004). Étudier la courbe en polaire :

$$\rho = \frac{\sin\theta}{1-\tan\theta}$$

Précisez les branches infinies.

Exercice 49 (Centrale 2004). Étude de la courbe polaire :

$$r = -\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}-1}{1+\cos(\theta)}$$

on précisera les tangentes en 0 $\pi/4$, $\pi/2$ et $3\pi/2$, le comportement en π, l'allure de la courbe et les points doubles.

Exercice 50 (TPE 2001). Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \sin(2\theta)$.

Exercice 51 (X 1996). Étudier la courbe, définie en coordonnées polaires, par :

$$\rho(\theta) = \frac{1+2\cos\theta}{1+2\sin\theta}$$

Exercice 52 (Mines 1998). Étudier la courbe, définie en coordonnées polaires, par :

$$\rho(\theta) = \cos\theta + \cos 2\theta$$

Exercice 53 (Centrale 99). Tracé et points doubles de :

$$\rho = \frac{\theta}{\pi - \theta}$$

Exercice 54 (Centrale 98). Donner l'allure de la courbe :

$$\rho = \theta + \cos\theta$$

Exercice 55 (Mines 2001). Tracer l'allure de la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \frac{1}{4+\cos\theta}$$

Exercice 56 (Mines 2005). Tracer la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \frac{1}{4+\cos 3\theta}$$

et calculer aire encerclée par la boucle.

Exercice 57 (Centrale 2005). Tracer la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

11.2 Propriétés géométriques des courbes planes

Exercice 58 (Cen 2000 et 2001). On considère la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{(t-1)(t+2)} \end{cases}$$

Points doubles, asymptotes ?
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de paramètres t_1, t_2, t_3 soient alignés. Points d'inflexion ?

Exercice 59 (Cen). Condition nécessaire et suffisante sur t_1 t_2 t_3 pour que les normales à $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$ soient concourantes.

Exercice 60 (Ccp 2007). Dans le plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on définit :

$$\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$$

$$M(\theta) = O + \mathrm{e}^{k\theta}\,\overrightarrow{u(\theta)}$$

Où $k \in \mathbf{R}^*$ donné. Soit C la courbe $\theta \mapsto M(\theta)$.

1. Donner un vecteur unitaire qui dirige la tangente $(\mathcal{T}_\theta)$ à C en $M(\theta)$ puis une équation cartésienne de cette tangente.
2. Lême question pour la normale notée $(\mathcal{N}_\theta)$.
3. On veut que $(\mathcal{N}_\theta) = (\mathcal{T}_\phi)$.
   (a) Montrer que nécessairement $\phi - \theta = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{N}_\theta)$ et $(\mathcal{T}_\phi)$ soient confondues.

Exercice 61 (Centrale 2006). Dans le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point $A(a, 0)$ où $a > 0$ est fixé. On considère le cercle (C) centré en un point P de Oy et qui passe par O. La droite (AP) coupe le cercle en deux points M et N.

1. Équation cartésienne de (Γ), courbe décrite par M et N lorsque P se déplace sur (Oy) ?
2. Paramétrer (Γ) en polaires.

Exercice 62 (Centrale 2005). Une droite variable passant par le centre O du repère orthonormé, foyer d'une conique $(\mathcal{C})$, recoupe $(\mathcal{C})$ en A et B.

1. Déterminer le lieu du milieu I de AB.
2. Déterminer le lieu du point P d'intersection des tangentes à $(\mathcal{C})$ en A et B.
3. I et P sont-ils alignés avec un point fixe ?

Exercice 63 (Centrale 2004). On se place dans le plan affine euclidien P muni du repère $(R) = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé. Soit $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ (avec $c > 0$ sous entendu).

1. Donner une équation cartésienne générale d'une ellipse de foyers F et F'.
2. De même pour une conique générale de foyers F et F'.
3. Trouver le lieu des points M appartenant à une ellipse de foyers F et F' tels que la tangente à cette ellipse en M ait une pente égale à 1.

Exercice 64 (Mines 98 : premier théorème de Poncelet). Montrer que la tangente à une ellipse de foyers F et F', en un point M, est bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

Exercice 65 (Deuxième théorème de Poncelet). Soit (E) une ellipse de foyer F. Deux tangentes à (E) en M_1 et M_2 se coupent en P. Prouver que les droites FM_1 et FM_2 sont symétriques relativement à FP.

Exercice 66 (CCP 2007). Soit (C) la courbe définie en repère orthonormé direct par :

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

1. Étude et tracé de (C).
2. Montrer que la tangente à (C) au point de paramètre t a pour équation :

$$x \cos t + y \sin t - \sin t \cos t = 0$$

3. Trouver le lieu des points M qui appartiennent à deux tangentes de (C) qui se coupent orthogonalement en M. En donner une équation polaire.

Exercice 67 (Cen Maple). Étude de la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = t\cos t - \sin t \end{cases}$$

où $t \in [-2\pi, 2\pi]$. La tracer à l'ordinateur. Prouver que les tangentes aux points singuliers passent par 0.

Exercice 68 (Cen). Allure de la courbe (C) $\rho = \frac{\sin\theta}{\theta}$? Montrer que les points tels que la normale à (C) passe par O sont sur un même cercle.

Exercice 69 (Centrale 2002). -

1. Tracer la courbe (C) d'équation polaire :

$$\rho = a(1 + \sin\theta) \qquad a > 0$$

2. Soit M un point de (C) ; montrer l'existence de deux autres points M_1 et M_2 de (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la tangente en M.
3. Lieu du milieu de M_1M_2 lorsque M varie sur (C).
4. Lieu du symétrique de O par rapport à une tangente variable à (C).

Exercice 70 (Mines 2004). Soit un cercle (C) de centre O, de rayon R. Soit (G) un cercle tangent en un point fixe à (C), extérieur à (C), de rayon r. Soient M et M' les points d'intersection de (G) et des tangentes communes à (C) et (G). Etudier les lieux de M et M' lorsque r varie.

Exercice 71 (Mines 2006). Soient O et A deux points fixes d'un plan affine euclidien orienté. Déterminer le lieu du centre d'un cercle passant par A d'où l'on peut mener du point O deux tangentes faisant entre elles un angle de $2\pi/3$.

Exercice 72 (Mines 2006). on considére $p \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soit D_θ la droite d'équation :

$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + p(\theta) = 0$$

trouver les arcs paramétrés réguliers γ :

$$\theta \mapsto M(\theta)$$

tels que :

i) $\forall\theta$, $M(\theta) \in D_\theta$.

ii) Quel que soit θ, D_θ constitue une tangente à γ au point $M(\theta)$.

Exercice 73 (Mines 2004). On se place dans un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé d'axes (Ox, Oy).

1. Soit (Δ) une droite et H le projeté orthogonal de O sur (Δ). Déterminer une équation de (Δ) en fonction d'un couple de coordonnées polaires de H.
2. On définit un deuxième repère MXY avec $M(a, b)$ fixe. Le point d'intersection de Oy avec MY est appelé Q et celui de Ox avec MX s'appelle P. On appelle (Δ) la droite PQ et H le projeté de O sur (Δ). Lieu de H quand le second repère tourne autour de M ?

Exercice 74 (Centrale 2002). Soit $(\mathcal{C})$ la courbe dont une équation en repère orthonormé est :

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,xy = 0 \qquad a > 0$$

1. $(\mathcal{C})$ admet-elle un axe de symétrie ?
2. Paramétrer $(\mathcal{C})$ en la coupant par la droite d'équation $y = tx$. Étudier et tracer $(\mathcal{C})$.
3. Conditions sur les paramètres de trois points distincts de $(\mathcal{C})$ pour qu'ils soient alignés.
4. Montrer que la tangente en un point de $(\mathcal{C})$ recoupe généralement $(\mathcal{C})$ en un point. Prouver alors qu'à trois points alignés correspondent trois points alignés.

Exercice 75 (Centrale 2001). Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé $(\mathcal{R}) = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ le repère local associé à l'angle polaire $\theta \in \mathbf{R}$. On considère la courbe Γ dont une équation polaire dans $(\mathcal{R})$ est :

$$x\,(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 0$$

1. Tracer Γ en passant en polaires.
2. Soit $(\mathcal{D})$ la droite affine $O + \mathbf{R}\,\overrightarrow{v(\theta)})$ et $(\mathcal{N})$ la normale à Γ en un de ses points M. On pose $N = (\mathcal{D}) \cap (\mathcal{N})$. Donner l'équation de MN dans le repère $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ et déterminer ON.
3. Les tangentes au point double O coupent l'asymptote de Γ en A et B. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABO. Si M est un point de Γ, la droite (OM) coupe l'asymptote en Q et le cercle en P. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OM}$. En déduire un procédé simple pour la construction de Γ.

Exercice 76 (CCP 97, Cen 2000 et 2001). Étudier la courbe (C) :

$$x = 3t^2 \quad y = 2t^3$$

Axes de symétrie ? Points réguliers ? Trouver le lieu des points M d'où l'on

peut mener deux tangentes à (C) perpendiculaires entre elles. Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à (C).

Exercice 77 (Cen 99). Soit ABC un triangle équilatéral du plan affine euclidien orienté. On s'intéresse à l'ensemble (Γ) des points du plan tels que $MA\,MB\,MC = R^3$ où $R > 0$.

1. Montrer qu'on peut se limiter au car $R = 1$.
2. En choisissant un repère convenable, montrer que (Γ) est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z^3 - 1| = 1$.
3. Montrer qu'une équation polaire de (Γ) est :
$$\rho^3 = 2\cos 3\theta$$
4. Étudier et tracer (Γ).

Exercice 78 (Cen 2002). Dans un plan affine euclidien on considère un triangle OAB. Une droite variable (D) pivote autour de O et l'on note A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur (D). Écrire l'équation du cercle de diamètre $A'B'$. À quelle condition sur le triangle ce cercle passe-t-il par un point fixe ?

Exercice 79 (Mines 2004). Soit (E) l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Paramétrage de (E) et interprétation géométrique du paramètre.
2. Condition nécessaire et suffisante pour que la droite (D) d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à (E).
3. Lieu des points d'où l'on peut mener à (E) deux tangentes orthogonales.

Exercice 80 (Ccp 2006).

1. Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole ?
2. Calculer explicitement ce lieu pour la parabole d'équation :
$$y^2 + 6y + x + 12 = 0$$

Exercice 81 (Centrale 99). Déterminer les tangentes communes à :
$$y^2 = 2px, \quad \text{et} \quad x^2 = 2py$$

Exercice 82 (X98). On considère l'arc paramétré (γ) défini par :
$$\begin{cases} x &= 3t^2 \\ y &= 2t^3 \end{cases}$$
quel est le nombre de droites normales et tangentes à (γ) ?

Exercice 83 (Cen 2007). -

1. Tracer la courbe (Γ) d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.
2. Lieu des symétriques de O par rapport aux tangentes à (Γ).
3. Une droite passant par O coupe généralement (Γ) en deux points M_1 et M_2. Si A est le point de coordonnées $(2, 0)$, déterminer le lieu du centre de gravité du triangle AM_1M_2 quand la droite varie.
4. Lieu du point P d'intersection des normales à (Γ) en M_1 et M_2.

Exercice 84 (Cen). Soit (E) une ellipse d'excentricité e et de foyers F et F'. Lieu des orthocentres du triangle MFF' lorsque M décrit E. Représentation paramétrique et cartésienne de la courbe (C) obtenue. Tracer (C) avec l'ordinateur. Application numérique $c = \sqrt{2}/2$.

Exercice 85 (Cen). Tracer la courbe (Γ) :
$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$$
Déterminer le lieu des centres des cercles passant par 0 et tangents à (Γ).

Exercice 86 (Centrale 2001). On rappelle qu'une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales.

1. Que vaut l'excentricité d'une telle hyperbole ?
2. On considère une droite $(\mathcal{D})$ du plan, $A \notin (\mathcal{D})$ et $(\mathcal{H})$ une hyperbole équilatère passant par A et dont $(\mathcal{D})$ est une asymptote.
   (a) Lieu des foyers de $(\mathcal{H})$?
   (b) Lieu des centres de $(\mathcal{H})$?
   (c) Lieu des sommets de $(\mathcal{H})$?

Exercice 87 (Centrale 2002). Le Même que le précédent en remplaçant "asymptote" par "directrice".

Exercice 88 (Centrale 2007). Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé on considère un cercle (C_A) de centre $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$ et (C_B) de centre $B\left|\begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix}\right.$ où a et b sont des réels strictement positifs. Trouver le lieu des points d'intersection de ces deux cercles lorsque ceux-ci varient en restant tangents à une droite horizontale variable.

Exercice 89. Voir également les exercices : 1 page 20, 3 page 22, 4 page 22, 23 page 41.

11.3 Propriétés métriques des courbes planes, courbure

On pourra être amené à faire toutes les hypothèses nécessaires sur les conditions de régularité et les propriétés géométriques des courbes recherchées si l'énoncé ne les précise pas suffisamment

Exercice 90 (Ccp 2000). Tracer la courbe :

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t + 1 \\ y = 2\sin t + \sin 2t \end{cases}$$

et calculer sa longueur.

Exercice 91 (Tpe 98). Étudier la courbe :

$$\begin{cases} x = -a\displaystyle\int_0^t \operatorname{th}^2 u \, du \\ y = a\displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \, du \end{cases}$$

Déterminer une abscisse curviligne sur cette courbe.

Exercice 92 (Centrale 2006). On considère l'arc paramétré Γ défini par :

$$y = x^2 \text{ et } 0 \leq x \leq 1$$

Calculer la longueur de Γ et sa courbure au point courant.

Exercice 93 (Centrale 2007). On considère l'arc paramétré C défini en repère orthonormé par :

$$x = t \text{ et } y = \frac{1}{t}$$

1. Déterminer le centre de courbure K *sic* au point courant M de C.
2. Vérifier que $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OM} = 2||\overrightarrow{OM}||^2$. En déduire une construction géométrique de K.

Exercice 94. On considère la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation polaire :

$$\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$$

1. Tracer $(\mathcal{C})$.
2. Calculer la courbure en un point de $(\mathcal{C})$ et déterminer $\overrightarrow{T}$.

Exercice 95 (Cen 2003). $\mathcal{E}_2$ est un plan affine euclidien. Soit (C) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ en repère orthonormé. déterminer les applications affines de $\mathcal{E}_2$ telles que, pour tout M de (C), $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit normal à (C) en M. Existe-t-il une telle application qui soit une isométrie ?

Exercice 96 (Centrale 1998). On considère la courbe $(\mathcal{C})$ du plan affine euclidien orienté définie en repère orthonormé par :

$$\begin{cases} x = 2a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

1. Trouver le repère de Frenet.
2. Courbure et rayon de courbure.
3. Développée *(hors programme)*.

Exercice 97 (Cen). Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon a, A un point fixe de $(\mathcal{C})$ et M un point variable de $(\mathcal{C})$. Soit (Δ) la tangente à $(\mathcal{C})$ en A et I le point d'intersection de (Δ) et de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

1. Déterminer une équation polaire du lieu (Γ) du symétrique J de I par rapport à la droite OM.
2. Tracer (Γ).
3. Calculer son aire.
4. Calculer son rayon de courbure en A

Exercice 98 (Mines 2003). Soit (C) une courbe définie par une équation polaire $\rho = r(\theta)$, aussi régulière que nécessaire. On note H la projection orthogonale de son centre de courbure au point $M(\theta)$ sur le rayon vecteur correspondant. Calculer $\overline{HM}$.

Exercice 99 (Centrale 2001). Tracer la courbe (C) définie en repère orthonormé par :

$$\begin{cases} x = 2\arctan t \\ y = \ln\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) \end{cases} \quad |t| < 1$$

Étudier le lieu des centres de courbure aux points de (C).

Exercice 100 (Mines 2006). Tracer la courbe :

$$y = a\sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Lieu du centre de courbure au point courant de la courbe ?

Exercice 101. Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}_2$ est muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $a \in]0, +\infty[$.

1. Étudier la courbe C_a d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = a\ln\left|\tan \frac{t}{2}\right| + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$
2. Calculer le rayon de courbure R de C_a au point de paramètre t.
3. On définit le centre de courbure de C_a au point $M(t)$ comme étant le point I tel que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$. Quelle est la courbe décrite par $I(t)$.
4. Soit P le point d'intersection de la tangente à C_a en $M(t)$ avec Ox. Calculer MP et trouver toutes les courbes planes birégulières ayant la même propriété géométrique.

Exercice 102 (Cen 2003). Calculer le rayon de courbure au point courant d'une ellipse.

Exercice 103 (Hypocycloïde à trois rebroussement). Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}_2$ est muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On fait rouler un cercle (C_r) de rayon r à l'intérieur d'un cercle (Γ_R) de rayon $R = 3r$. Le repère est choisi de sorte qu'initialement les deux cercles soient tangents au point A d'abscisse R.

1. Ecrire, en fonction d'un paramètre convenable t, l'affixe du point M lié à (C_r) qui coïncide initialement avec A. On note (H_3) la courbe décrite par $M(t)$.

2. Préciser des transformations géométriques laissant (H_3) globalement invariantes. Tracer (H_3).
3. Calculer le rayon de courbure au point courant de (H_3).
4. Ecrire, sous forme normale, la tangente à (H_3). En déduire une équation polaire de la courbe (γ) décrite par les projections de 0 sur les tangentes à (H_3).
5. Calculer le rayon de courbure au point courant de (γ).
6. Quel est le lieu des points d'où l'on peut mener à (H_3) deux tangentes orthogonales.

Exercice 104 (Mines 2006, 2008). Soit γ un arc paramétré suffisamment régulier. La tangente en M à gamma coupe l'axe (Oy) en P. Soit C l'intersection de la normale en M et de la parallèle à (Ox) passant par P. À quelle condition sur γ le point C est-il le centre de courbure à γ en M ? *[L'xaminateur demande de chercher γ sous la forme $y = f(x)$]*

Exercice 105 (Mines 2006). Soit γ un arc paramétré suffisamment régulier, P la projection sur OM du centre de courbure (C) en un point M de γ. Déterminer γ de sorte que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PM}$.

Exercice 106. Un point M décrit un arc (γ) de classe $\mathcal{C}^2$ birégulier. On note H la projection d'un point fixe O sur la tangente en M à (γ) et Q le symétrique de O relativement à cette tangente. Démontrer que la tangente à la courbe décrite par H est orthogonale à QM. On travaillera dans le repère de Frenet en choisissant un bon paramètre.

Exercice 107. Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}_2$ est muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $a \in]0, +\infty[$, on note A le point de Ox d'abscisse A.

1. Ecrire l'équation d'une parabole de sommet O, dont on se donnera le foyer en coordonnées polaires et la directrice sous forme normale.
2. Quel est la courbe décrite par le foyer d'une parabole de sommet O qui passe par A ? Calculer son rayon de courbure en son point courant.

Exercice 108 (Mines 99). Soit une courbe (Γ) définie en polaires par $\theta \mapsto \rho(\theta)$, supposée aussi régulière que possible. Trouver les coordonnées, dans le repère local $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$, du point $P(\theta)$, intersection de la tangente en $M(\theta)$ à (Γ) et de la droite (D) faisant avec l'axe Ox l'angle $-\theta$. Trouver les courbes (Γ) telles que l'aire du triangle OMP soit constante.

Exercice 109. Trouver les courbes

telles que :

$$aR = \frac{\rho}{\sin^3 V}$$

Où R désigne le rayon de courbure, ρ, le rayon vecteur, V l'angle de la tangente avec le premier vecteur du repère local en coordonnées polaires. Cas particulier $a = 1$.

Exercice 110. Trouver les courbes telles que $R^2 = 2a\, s$, $a > 0$.

Exercice 111. Trouver les courbes telles que $R^2 + \epsilon\, s^2 = a^2$, $a > 0$, $\epsilon = \pm 1$.

Exercice 112 (X 98). Trouver les courbes (C) du plan affine euclidien tangentes en O à Ox, telles que l'abscisse de l'intersection avec Ox de la tangente en un point M de (C) soit celle du barycentre G de l'arc OM.

Exercice 113 (Centrale 98). Trouver les courbes du plan affine euclidien orienté telles que $2V + \theta = 0$. Étudier la courbure en un point d'une telle courbe.

Exercice 114 (X 98). Soit (H) une hyperbole équilatère. La normale en un point M de (H) recoupe l'autre branche de (H) en un point N. Si C est le centre de courbure de (H) en M, étudier le rapport $\frac{\overline{MC}}{\overline{MN}}$.

Exercice 115 (X 2000). On considère l'équation différentielle :

$$y^2 + 2\,(y')^2 - y\, y" = 0$$

Étudier cette équation en interprétant le premier membre à l'aide de la courbure d'une courbe plane.

Exercice 116 (Mines 2001). Soit (C) une courbe de $\mathbf{R}^2$ et un point A n'appartenant pas à (C). Soit T le point d'intersection de la tangente en M à (C) avec la droite passant par A et perpendiculaire à AM.
Caractériser et étudier (C) sachant que AT est constante.

Exercice 117 (X 2001). Soit C le centre de courbure en un point M d'une courbe plane (Γ) et H le projeté orthogonal de C sur OM où O est un point fixe du plan. Trouver les courbes (Γ) telles que O soit le milieu de HM. Donner l'allure de ces courbes.

Exercice 118 (X 2001). On considère une courbe plane (C) dont les tangentes ne sont parallèles à aucun axe du repère orthonormé. Soit M un point de (C). On note A *resp* B l'intersection de la normale *resp de la tangente* en M avec Ox *resp* Oy. Trouver les courbes (C) pour lesquelles $AB = Cte$ en choisissant comme paramètre l'angle α que fait la tangente à (C) en M avec Ox.

Exercice 119 (Mines). Trouver les courbes planes vérifiant $y^2 = a^2 + s^2$ où s désigne l'abscisse curviligne et $a > 0$.

Exercice 120 (Centrale 97). Chercher les arcs biréguliers passant par A et tels que la mesure de l'arc orienté AM soit proportionnelle à l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Exercice 121. Voir également les exercices : 11 page 30.

Quatrième partie
Géométrie spatiale

12 Équations de plans et de droites

cf cours de première année.

Exercice 122 (Ccp). Dans un espace affine de dimension 3, on se donne un tétraèdre $OABC$. Un plan $(\mathcal{P})$ est parallèle au plan ABC et ne contient pas O. On note A', B', C' les milieux de BC, CA, AB et A", B", C" les intersections avec $(\mathcal{P})$ de OA, OB, OC. Montrer qu'en général les droites $A'A$", $B'B$", $C'C$" concourent.

Exercice 123 (Ccp 2000). Dans un espace affine $\mathcal{E}$, on considère trois quadruplets de points alignés :

$$OA_1A_2A_3 \quad OB_1B_2B_3 \qquad OC_1C_2C_3$$

On suppose, de plus, que les trois plans $A_iB_iC_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ sont parallèles entre eux. On pose :

$$I = B_1C_2 \cap B_2C_1 \qquad J = A_1C_2 \cap A_2C_1$$

$$K = A_1B_2 \cap A_2B_1$$

Montrer que les droites IA_3, JB_3, KC_3 sont concourantes ou parallèles

Exercice 124 (Centrale 2007). Soient a, b, c trois réels. Dans l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$, on considère les quatre points :

$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AZ, BZ, CZ.
2. On suppose que les réels (a, b, c) sont les racines du polynôme $X^3 + pX + q$. Exprimer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC en fonction de p et q.

Exercice 125. Dans l'espace affine euclidien on se donne les quatre plans d'équations :

$$\begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ y + z - 1 &= 0 \\ z + x - 1 &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

Trouver les valeurs de a telles que les symétriques du point $M(1, 1, a)$ par rapport à ces quatre plans soient coplanaires. Étudier l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les symétriques par rapport aux quatre plans sont coplanaires.

Exercice 126. (Maple obligatoire) On rapporte l'espace à un trièdre orthonormé $Oxyz$. On considère deux points distincts, différents de O, A_1 et A_2 sur Ox *(resp B_1 et B_2 sur Oy, resp C_1 et C_2 sur Oz)*. Montrer que les orthocentres des huits triangles $A_iB_jC_k$ sont sur une même sphère.

13 Faisceaux de plans

On utilisera dans la suite les notions de géométrie affine et euclidienne vues en première année et la notion de faisceau de plans : dans un espace affine $\mathcal{E}_3$, muni d'un repère cartésien $(\mathcal{R})$, si (P_1) et (P_2) sont deux plans non parallèles d'équations respectives $P_1(M) = 0$ et $P_2(M) = 0$ avec $M(x, y, z)$ et, pour $i = 1, 2$:

$$P_i(M) = a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0 \quad \text{et } (a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$$

La matrice :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 puisque (P_1) et (P_2) sont non parallèles et si $(D) = (P_1) \cap (P_2)$, les plans (P) contenant (D) sont ceux susceptibles d'une équation de la forme :

$$\lambda_1P_1(M) + \lambda_2P_2(M) = 0 \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$$

On peut aussi écrire un tel plan sous la forme $P_1 + \lambda P_2$ mais on "perd" ainsi le plan (P_2). la preuve est identique à celle faite à propos des droites et constitue un bon exercice.

Exercice 127. (Ccp 99) Dans l'espace affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé, déterminer le symétrique du plan d'équation :

$$x - 2y + 3z = 4$$

par rapport au plan déquation

$$x + y + z = 1$$

Exercice 128 (Mines 2002). L'espace est rapporté à un repère orthonormé. (D) est la droite d'équations :

$$\begin{cases} 4x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 5z &= -4 \end{cases}$$

A est le point de coordonnées $(1, 1, 1)$. Déterminer les plans qui contiennent (D) et dont la distance à A vaut 1.

13.1 Distance d'un point à une droite

Voir cours de première année (deux exercices de révision).

13.2 Perpendiculaire commune à deux droites

Voir cours de première année

Exercice 129 (Centrale). Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites (D_1) et (D_2) de l'espace définies par :

$$(D_1)\begin{cases} x + y - z + 1 &= 0 \\ x - y - 1 &= 0 \end{cases}$$

$$(D_2)\begin{cases} x + 2y + 3z + 1 &= 0 \\ 2x - y - z - 1 &= 0 \end{cases}$$

14 Courbes paramétriques dans l'espace

Exercice 130 (Cen 2007). Dans l'espace affine muni d'un repère orthonormé on considère la courbe (C) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{t+1} \\ y &= \dfrac{t}{t^2-1} \\ z &= \dfrac{t}{t-1} \end{cases}$$

17 décembre 2008

1. Montrer que (C) est une courbe plane.
2. Étudier les projections de (C) sur le plan xOy.
3. Centres et axes de symétrie de (C).

Exercice 131 (Cen 99). Dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= t^3 \\ y &= \dfrac{t^3-1}{t^2} \\ z &= \dfrac{t^2+1}{t^2} \end{cases}$$

Étudier les projections de (Γ) sur les plans xOy et yOz. Le plan osculateur *sic* en $M(t_0)$ à Γ la recoupe en $M(t_1)$ et $M(t_2)$. Trouver une relation entre t_0, t_1, t_2.

Exercice 132 (Cen 2002). Dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé on considère la courbe (C) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= t^4 \\ y &= t^3 \\ z &= t^7 \end{cases}$$

1. Étudier les projections de (C) sur les plans de coordonnées.
2. Condition sur quatre paramètres distincts $(t_i)_{1\le i\le 4}$ pour que les points $M(t_i)$ soient coplanaires.

Exercice 133 (Centrale 99). Dans un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé, on se donne les points $A(0, 1, 1)$ et $B(0, 0, 1)$. Soit P un point qui décrit le cercle de centre O et de rayon 1 dans le plan xOy. Donner les coordonnées de M, projection orthogonale de A sur la droite BP et décrire la courbe décrite par M en la projetant sur des plans convenables.

Exercice 134 (Centrale 99). Que dire des tangentes à l'image d'un arc $\mathcal{C}^1$, tracé dans un espace affine de dimension 3, par une transformation affine d'icelui ?